29.03.2020

$$e = \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Mathematikabitur Tipps

1. **Analysis**
   - Aus Bestand die Änderungsrate berechnen → 1. Ableitung
   - Aus Änderungsrate Bestand berechnen → Stammfunktion (integrieren)
   - Funktionen haben keinen Sprung → Funktionswerte müssen an der Stelle gleich sein
   - Funktionen verlaufen knickfrei → die erste Ableitung der Funktionen an der Stelle muss gleich sein.
   - Maxima $f'=0$ und $f''<0$
   - Minima $f'=0$ und $f''>0$
   - Wendepunkt $f''=0$ und f''' ungleich Null
   - Krümmung: $f''>0$ Linkskrümmung $f''<0$ Rechtskrümmung
   - Funktion n-ten Grades hat höchstens n Nullstellen, n-1 Extrempunkte und n-2 Wendepunkte
   - Sattelpunkt: wie Wendepunkt, aber auch $f'=0$
   - Symmetrie: zur y-Achse: $f(x)=f(-x)$
     Symmetrie: zum Ursprung: $f(x)=-f(-x)$
   - Ableitung allgemein: $\left(ax^n\right)' = a \cdot n \cdot x^{n-1}$
   - Integral allgemein: $\int ax^n dx = \frac{a}{n+1} x^{n+1}$

2. **Darstellende Geometrie**
   - Senkrechte Vektoren → Skalarprodukt ist Null
   - Senkrechten Vektor zu zwei anderen Vektoren bestimmen → Vektorprodukt (=Kreuzprodukt)
   - Winkel zwischen Ebenen → Winkel zwischen den Normalenvektoren berechnen
   - Schnittpunkte, z.B. von Gerade und Gerade → Gleichsetzen der (Parameter) Darstellungen
   - Schattenwurf: Durch eine Gerade oder Ebene beschreiben
   - Spiegelung an der x_1 x_2 Ebene → Vorzeichen der x_3 Koordinate umdrehen

Ableitungsregeln

1. konstante Funktion $f(x) = c$
   $f'(x) = 0$

2. Faktorregel $f(x) = c \cdot x$
   $f'(x) = c$

3. Potenzregel $f(x) = x^n$
   $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

4. Summen/Differenzregel $f(x) = g(x) \pm h(x)$
   $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$

5. Produktregel $f(x) = g(x) \cdot h(x)$
   $f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$

6. Quotientenregel $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$
   $f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$

7. Kettenregel $f(x) = g(h(x))$
   $f'(x) = h'(x) \cdot g'(h(x))$

8. Umkehrregel $f(x) = \log_a x$
   $f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

Aufgaben zu den Ableitungsregeln

1. Berechne die erste Ableitung
   a. $f(x) = (2x+2)^2$
   b. $f(x) = \sqrt{2x} = (2x)^{\frac{1}{2}}$
   c. $f(x) = \tan(x)$
   d. $f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$
   e. $f(x) = (2x^2 - 4)^2$
   f. $f(x) = e^{2 \cdot x - 1}$
   g. $f(x) = \ln(x)$
   h. $f(x) = 1 + \ln(\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2})$

Grenzwertberechnung

Der Funktionsterm konvergiert gegen einen festen Wert oder er divergiert gegen (minus) unendlich.

1. Einfache Grenzwerte

$$\lim_{x\to\infty} c = c$$

$$\lim_{x\to\infty} b^x = 0 \text{ für b<1} \qquad \lim_{x\to\infty} b^x = \infty \text{ für b>1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{x-1} = 2$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+4}{1-2x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2(1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2})}{x^2(-2+\frac{1}{x^2})} = \frac{1}{-2} = -2$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e \qquad \lim_{x\to\infty}(1+\frac{a}{n})^n = e^a$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln x} = \infty \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{\ln x} = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\ln x} \stackrel{l'H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{x}{2\sqrt{x}} = \infty$$

2. Regel von l'Hôpital

Die Regel von l'Hôpital darf angewendet werden, wenn man den Grenzwert eines Bruches an einer Stelle bilden möchte an der Zähler und Nenner gegen Null gehen, oder an der Zähler und Nenner gegen unendlich gehen.

Man erhält den Grenzwert indem man Zähler und Nenner zuerst einzeln differenziert, dann den Grenzwert bildet und so erkennt welches der beiden schneller kon- oder divergiert:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{l'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{oder} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{l'H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Beispiel:

$$\lim_{x\to 0} = \frac{e^x-1}{\sin x}$$

Da Nenner und Zähler gegen Null gehen dürfen wir die Regel von l´Hopital anwenden.

Wir leiten Zähler und Nenner getrennt voneinander ab:

$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{\cos x}$ und berechnen nun den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{\cos(x)} = \frac{1}{1} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin(x)} = 1$$

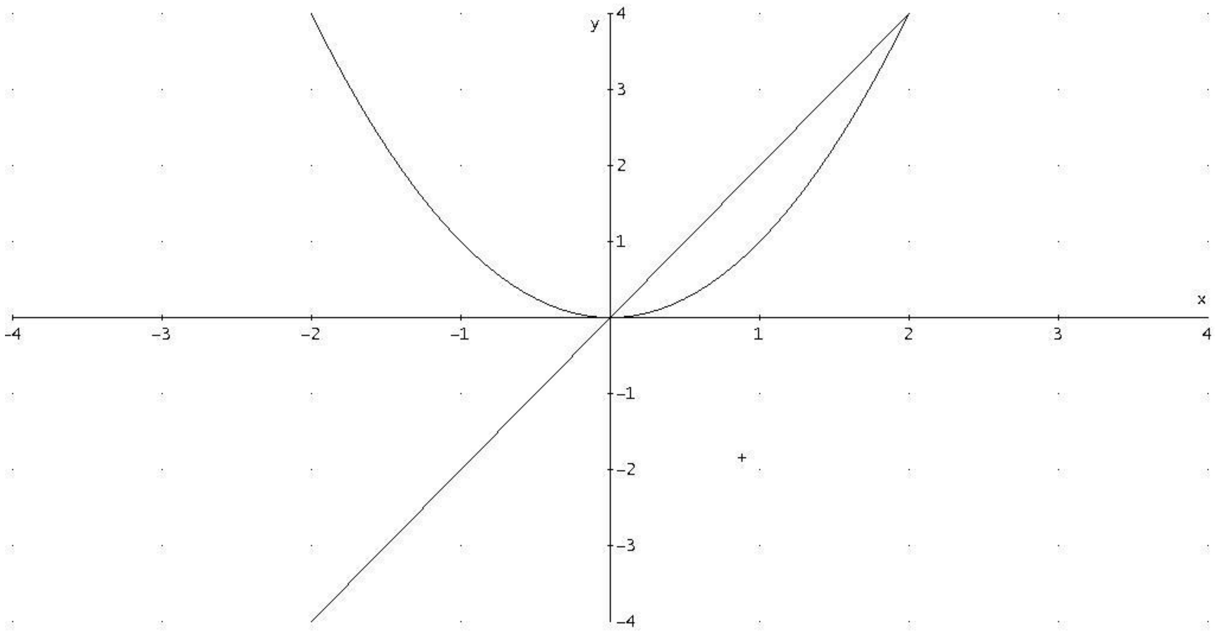
Aufgaben zu der Regel von l´Hôpital

1. Berechne den Grenzwert
   a. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x}{2}$
   b. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$
   c. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$

Finden der Ableitung durch Betrachten des Funktionsgraph

Die Ableitung eines Graphs findet man indem man an verschiedenen Punkten des Graphs Tangenten einzeichnet und ihre Steigung ermittelt. Da die erste Ableitung die Steigung angibt und wir diese an verschiedenen Punkten haben müssen wir nur noch diese als y-Werte nehmen und einen zweiten Graphen einzeichnen, die erste Ableitung.

In diesem Koordinatensystem sind ein Graph und seine erste Ableitung eingezeichnet. Zeichne nun die Tangenten ein und ermittle ihre Steigung um den Graphen der ersten Ableitung besser nachvollziehen zu können.



Lösungen zu den Aufgaben zu den Ableitungsregeln

1.

a. $f(x) = (2x+2)^2$ $\qquad$ $f'(x) = 2(2x+2)\cdot 2$

b. $f(x) = \sqrt{2x} \qquad = (2x)^{\frac{1}{2}}$ $\qquad$ $f'(x) = \frac{1}{2}(2x)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2 = (2x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2x}}$

c. $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ $\qquad$ $f'(x) = \frac{1}{\cos(x)^2}$

d. $f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$ $\qquad$ $f'(x) = 2x\cdot\sin(x) + x^2\cdot\cos(x)$

e. $f(x) = (2x^2-4)^2$ $\qquad$ $f'(x) = 2(x^2-4)\cdot 4x$

f. $f(x) = e^{2\cdot x-1}$ $\qquad$ $f'(x) = 2\cdot e^{2\cdot x-1}$

g. $f(x) = \ln(x)$ $\qquad$ $f'(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad$ $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$

h. $f(x) = 1 + \ln(\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2})$ $\qquad$ $f'(x) = \frac{1}{(\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{2})}\cdot\frac{1}{4}x$

Lösungen zu den Aufgaben zu der Regel von l´Hôpital

1.

a. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{2} = 2$

b. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

c. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$

Integralrechnung Teil 1

1. Algebraisch integrieren:

So nennt man das Bestimmen eines Integrals durch das Herleiten einer Stammfunktion[∫ f(x) dx = F(x)] zu der Funktion des Graphen. Um diese Stammfunktionen zu ermitteln benutzt man folgende Integrationsregeln (siehe 2.).

2. Integrationsregeln:

Summenregel: $\int (u(x) + v(x))\,dx = \int u(x)\,dx + \int v(x)\,dx$

Faktorregel: $\int c u(x)\,dx = c \int u(x)\,dx$

Partielle Integration: $\int u(x) \cdot v'(x)\,dx = [u(x) \cdot v(x)] - \int u'(x) \cdot v(x)\,dx$

Substitution: $\int u'(v(x)) \cdot v'(x)\,dx = u(v(x))$

a. Besondere Funktionen:

$\int e^x\,dx = e^x + c$

$\int \ln x\,dx = x \cdot \ln |x| - x + c$

$\int \sin x\,dx = - \cos x + c$

$\int \cos x\,dx = \sin x + c$

$\int a \cdot x^n\,dx = a \frac{1}{n+1} x^{n+1}$

$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln |x|$

$\int \sqrt{x}\,dx = \int x \frac{1}{2}\,dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$

$\int \frac{1}{(1+x^2)}\,dx = \arctan(x)$

3. Uneigentliche Integrale:

Wenn die Fläche unter einer Funktion, also das Integral, trotz unendlicher Grenzen endlich ist, ist es ein uneigentliches Integral.

- Beispiel:

$$\int_1^\infty x dx = \infty$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \infty$$

- Aufgaben:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$$

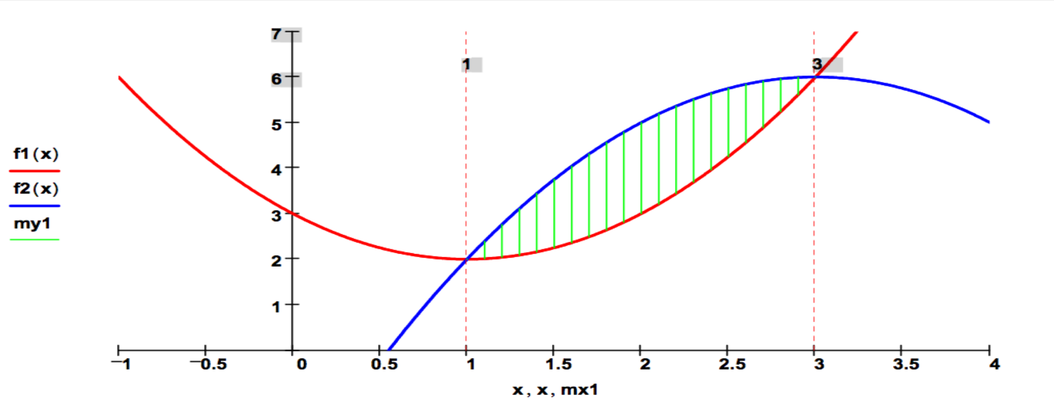
4. numerisch integrieren:
Man berechnet die Fläche unter einem Funktionsgraphen durch Summation von kleinen Rechtecken, die man unter diesem gebildet hat und erhält so das Integral als Flächeninhalt und nicht als algebraischen Ausdruck.

5. Deutung von Integralen:
Das Integral der Änderungsfunktion beschreibt den Bestand, umgekehrt kommt durch Ableiten vom Bestand zur Änderungsrate.

6. Fläche zwischen 2 Funktionen:
$A = A_1 - A_2 = \int (f_2(x) - f_1(x))\, dx$

a. Löse die folgende Aufgabe:

$f1(x) := (x-1)^2 - 1 + 3 \qquad f2(x) := -(x-3)^2 + 3 + 3$



Lösung

zu 3b.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \infty$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = 1$$

zu 6b.

$\int (-(x-3)^2+3+3)-((x-1)^2-1+3)dx =$

$\int (-(x^2-6x+9)+6)-(x^2-2x+1-1+3)dx =$

$\int (-x^2+6x-9+6)-x^2+2x-3\ dx =$

$\int -2x^2+8x-6 =$

$\int x^2-4x+3 =$

$[\ 2/3\ x^3 - 2x^2 + 3x\ ]$ im Intervall $[3,1] =$

$(2/3\ 3^3 - 2\ 3^2 + 3\ 3) - (2/3\ 1^3 - 2\ 1^2 + 3\ 1)$

$= 9 - 1\ 2/3$

$= 7\ 1/3$

Umgang mit Vektoren

Viet Anh Pham Duc

Algebraische und geometrische Addition/Subtraktion:

- $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d \\ b+e \\ c+f \end{pmatrix}$ $\quad\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-d \\ b-e \\ c-f \end{pmatrix}$ $\quad\quad \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

  Die Einträge werden einzeln addiert bzw. subtrahiert.

Skalarprodukt:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = a \cdot d + b \cdot e + c \cdot f$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix} = 16 + 40 + 72 = 128$$

Zwei Vektoren werden miteinander multipliziert, indem man die einzelnen Einträge multipliziert und die Produkte addiert.
Es entsteht bei der Multiplikation zweier Vektoren **immer** ein Skalar!

Eigenschaften:

- Sind 2 Vektoren parallel, so gilt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$
- Sind 2 Vektoren orthogonal zueinander, so gilt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Winkelmessung mit dem Skalarprodukt:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad \rightarrow \quad \varphi = \cos^{-1} \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Bsp.:

Finde den eingeschlossenen Winkel von:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{8}{\sqrt{70}} \quad \rightarrow \quad \varphi = 17°°$$

1. Parameterdarstellung => Koordinatendarstellung

Allgemein	**Am Beispiel verdeutlicht**
Gegeben ist eine Ebene in Parameterdarstellung	
$E: \vec{x} = \vec{s} + \lambda * \vec{u} + \mu * \vec{v}$ Wobei $\vec{s}$ der Stützvektor und $\vec{u}$ bzw. $\vec{v}$ die Richtungsvektoren sind	$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu * \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
Weil die Normale $\vec{n}$ senkrecht auf der Ebene steht und somit orthogonal zu den Richtungsvektoren ist, ergeben sich folgende Bedingungen	
$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ und $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$	$\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ und $\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$
Man löst nun $\vec{n}$ auf	
$n_1 * u_1 + n_2 * u_2 + n_3 * u_3 = 0$ $n_1 * v_1 + n_2 * v_2 + n_3 * v_3 = 0$	$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}$
Nun ergibt sich also folgende vorläufige Version der Koordinatendarstellung	
$E: n_1 * x + n_2 * y + n_3 * z = ?$	$E: 1 * x + 2 * y - 10 * z = ?$
Um nun die rechte Seite der Gleichung herauszubekommen, setzen wir für x, y und z den Stützvektor ein; man erhält die fertige Koordinatendarstellung	
$n_1 * s_1 + n_2 * s_2 + n_3 * s_3 = \alpha$ $\Rightarrow E: n_1 * x + n_2 * y + n_3 * z = \alpha$	$1 * 2 + 2 * 5 - 10 * 7 = -58$ $\Rightarrow E: 1 * x + 2 * y - 10 * z = -58$

2. Koordinatendarstellung => Parameterdarstellung

Allgemein	**Am Beispiel verdeutlicht**
Gegeben ist eine Ebene in Koordinatendarstellung	
$E: n_1 * x + n_2 * y + n_3 * z = \alpha$ Wobei $\vec{n}$ der Normalenvektor ist	$E: 3 * x - 2 * y + 14 * z = 5$
Weil die Normale $\vec{n}$ senkrecht auf der Ebene steht und somit orthogonal zu den Richtungsvektoren ist, ergeben sich folgende Bedingungen	
$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ und $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$	$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 14 \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = 0$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 14 \end{pmatrix} \cdot \vec{v} = 0$
Man löst nun $\vec{u}$ und $\vec{v}$ auf	
$n_1 * u_1 + n_2 * u_2 + n_3 * u_3 = 0$ $n_1 * v_1 + n_2 * v_2 + n_3 * v_3 = 0$	$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$
Um den Stützvektor zu erhalten, wählt man für die gegebene Gleichung Werte für x, y und z, bei denen die Gleichung erfüllt ist; diese ergeben den Stützvektor	
$n_1 * s_1 + n_2 * s_2 + n_3 * s_3 = \alpha$	$\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Nun hat man den Richtungsvektor und die Stützvektoren, die zusammen die Parameterdarstellung bilden	
$E: \vec{x} = \vec{s} + \lambda * \vec{u} + \mu * \vec{v}$	$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu * \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Abstand: Punkt <=> Gerade

Allgemein	**Am Beispiel verdeutlicht**
Gegeben sind ein Punkt P und eine Gerade g	
$P(P_1 / P_2 / P_3)$ $g: \vec{x} = \vec{s} + \lambda * \vec{u}$ Wobei $\vec{s}$ der Stützvektor und $\vec{u}$ der Richtungsvektor ist	$P(2/3/5)$ $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
Weil der Vektor $\vec{r}$, der von der Geraden (Punkt Q) auf den Punkt zeigt, senkrecht auf der Geraden steht, ergibt sich folgende Bedingung	
$\vec{r} \cdot \vec{u} = 0$ $\Rightarrow (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}) \cdot \vec{u} = 0$	$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \overrightarrow{OQ} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$
$\overrightarrow{OQ}$ kann nun durch den Funktionsterm ersetzt werden, weil Q ja auf der geraden liegt; dann nach λ auflösen	
$(\overrightarrow{OP} - (\vec{s} + \lambda * \vec{u})) \cdot \vec{u} = 0$ $\Leftrightarrow (\overrightarrow{OP} - \vec{s}) \cdot \vec{u} = \lambda * \vec{u}^2$ $\Leftrightarrow \lambda = \frac{(\overrightarrow{OP} - \vec{s}) \cdot \vec{u}}{\vec{u}^2}$	$\lambda = 1$
Durch Einsetzen von λ in die gegebene Gleichung erhält man $\overrightarrow{OQ}$	
$\overrightarrow{OQ} = \vec{s} + \frac{(\overrightarrow{OP} - \vec{s}) \cdot \vec{u}}{\vec{u}^2} * \vec{u}$	$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow Q(2/3/4)$
Jetzt muss nur noch der Abstand zwischen P und Q berechnet werden	
$l = \lvert \vec{r} \rvert$ $\Leftrightarrow l = \lvert \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} \rvert$	$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $l = 1$

4. Abstand: Gerade <=> Gerade

Allgemein	**Am Beispiel verdeutlicht**
Gegeben sind die zwei Geraden g_1 und g_2	
$g_1 : \vec{x} = \vec{s}_1 + \lambda * \vec{u}_1$ $g_2 : \vec{x} = \vec{s}_2 + \mu * \vec{u}_2$ Wobei $\vec{s}$ die Stützvektoren und $\vec{u}$ die Richtungsvektoren sind	$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
Der Vektor $\vec{r}$ verbindet die beiden Geraden jeweils an den Punkten der Geraden, wo sich der geringste Abstand ergibt	
$\vec{r} = g_1 - g_2$ $\Leftrightarrow \vec{r} = \vec{s}_1 - \vec{s}_2 + \lambda * \vec{u}_1 - \mu * \vec{u}_2$	$\vec{r} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \mu * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
Weil $\vec{r}$ orthogonal zu den Richtungsvektoren der beiden Geraden sein muss, ergeben sich folgende Bedingungen bzw. Gleichungen; anschließend gaußen, um λ und μ herauszukriegen	
$\vec{r} \cdot \vec{u}_1 = 0$ $\Leftrightarrow (\vec{s}_1 - \vec{s}_2) \cdot \vec{u}_1 + \lambda * \vec{u}_1^{\,2} - \mu * \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1 = 0$ und $\vec{r} \cdot \vec{u}_2 = 0$ $\Leftrightarrow (\vec{s}_1 - \vec{s}_2) \cdot \vec{u}_2 + \lambda * \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 - \mu * \vec{u}_2^{\,2} = 0$	$-9 + 2 * \lambda - 1 * \mu = 0$ und $-5 + 1 * \lambda - 2 * \mu = 0$ $\Rightarrow \lambda = -\frac{1}{3} \wedge \mu = \frac{13}{3}$
Nun setzt man λ und μ in die gegebenen Gleichungen ein und erhält zwei Vektoren $\vec{P}_1$ und $\vec{P}_2$	
$\overrightarrow{OP_1} = \vec{s}_1 + \lambda * \vec{u}_1$ $\overrightarrow{OP_2} = \vec{s}_2 + \mu * \vec{u}_2$	$\vec{P}_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 5/3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{P}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 34/3 \\ 25/3 \end{pmatrix}$
Jetzt muss nur noch der Abstand zwischen $\vec{P}_1$ und $\vec{P}_2$ berechnet werden	
$l = \lvert \vec{r} \rvert$ $\Leftrightarrow l = \lvert \overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_2} \rvert$	$\vec{r} = \begin{pmatrix} -13/3 \\ -29/3 \\ -13/3 \end{pmatrix}$ $l = \sqrt{131} \approx 11{,}45$

5. Schnittmenge von zwei Ebenen

Allgemein	**Am Beispiel verdeutlicht**
Gegeben sind zwei Ebenen E_1 *und* E_2 *in Koordinatendarstellung (wenn dem nicht so ist, umformen!)*	
$E_1: n_{1_1} * x + n_{2_1} * y + n_{3_1} * z = \alpha_1$ $E_2: n_{1_2} * x + n_{2_2} * y + n_{3_2} * z = \alpha_2$	$E_1: 1 * x + 2 * y + 3 * z = 10$ $E_2: 3 * x + 2 * y + 1 * z = 15$
Nun gaußt man so, dass man für x, y und z Terme erhält, die von einer Variable abhängig sind	
$x = x$ $y = n * x + p$ $z = m * x + q$	$\mathrm{I}: 1x + 2y + 3z = 10$ $\mathrm{II}: 3x + 2y + z = 15$ $\mathrm{II} - \mathrm{I}: 2x - 2z = 5$ $\Rightarrow z = x - \frac{5}{2}$ einsetzen in II: $3x + 2y + x - \frac{5}{2} = 15$ $\Rightarrow y = -2x + \frac{35}{4}$
Jeder Punkt in der Schnittmenge wird so beschrieben	
$P(x / y / z)$ $\Leftrightarrow P(x / n * x + p / m * x + q)$ $\Rightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ q \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} 1 \\ n \\ m \end{pmatrix}$	$P\left(x / -2x + \frac{35}{4} / x - \frac{5}{2}\right)$ $\Rightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 35/4 \\ 5/2 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

6. Übungsaufgaben

1. **Umwandlung: Parameterdarstellung => Koordinatendarstellung**
   a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$
   b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix}$
2. **Umwandlung: Koordinatendarstellung => Parameterdarstellung**
   a) $x + y + z = 0$
   b) $5x - y + 13z = -12$
3. **Abstand: Punkt <=> Gerade**
   a) $P(10/12/14)$ zu $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$
   b) $P(0/0/0)$ zu $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix}$
4. **Abstand: Gerade <=> Gerade**
   a) $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ zu $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu * \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix}$
   b) $g_1: \vec{x} = \lambda * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix} + \mu * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$
5. **Schnittmenge von zwei Ebenen**
   a) $x + y + z = 0$ und $5x - y + 13z = -12$
   b) $2x + 3y - 7z = 12$ und $4x + 6y - 14z = 25$