$$e = \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

13.06.2017

Klausur e-Funktion 12

1. Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen **(je 2P)**
   a. $f(x) = (4x^3 - 2x)^6$
   b. $f(x) = x^3 \cdot e^x$
   c. $f(x) = x \cdot \ln(x) - x$
   d. $f(x) = \frac{5x^2}{x+1}$

2. Bestimmen Sie die Stammfunktion der folgenden Funktionen **(je 2P)**
   a. $f(x) = e^{-2x}$
   b. $f(x) = e^{kx} + 2$
   c. $f(x) = \frac{1}{2x+1}$
   d. $f(x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2}$

3. Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = 4x \cdot e^{-0,5x}$.

   a. Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f. **(2P)**
   b. Berechnen Sie die Funktionswerte von f an der Stelle
   $x_1=-2$; $x_2= -1$; $x_3= 0$; $x_4= 1$; und $x_5= 2$. **(2P)**
   c. Bestimmen Sie das Verhalten der Funktion f für $x \to \pm\infty$. **(2P)**
   d. Berechnen Sie die erste und die zweite Ableitung der Funktion f. **(4P)**

   Kontrolle der Ableitungen $f'(x) = e^{-0,5x} \cdot (-2x+4)$ und $f''(x) = e^{-0,5x} \cdot (x-4)$

   e. Berechnen Sie die Extremwerte der Funktion f. **(3P)**
   f. Berechnen Sie den Wendepunkt der Funktion f. **(3P)**
   g. Zeichen Sie die Funktion f mit einem geeignetem Maßstab in ein Koordinatensystem. **(3P)**

   h. Zeigen Sie, dass $F(x) = e^{-0,5x} \cdot (-8x-16)$ eine Stammfunktion von f ist. **(3P)**

   i. Berechnen Sie die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Intervall [0;5] **(3P)**

   j. An die Funktion f werden zwei Tangenten gelegt. Eine im Ursprung, die andere an den Wendepunkt. Berechnen Sie beide Tangentengleichungen und den Schnittpunkt der beiden Tangenten. **(5P)**

Summe aller Punkte: 46 Punkte. **Viel Erfolg!**

L Ö S U N G

1. Bilden Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen **(je 2P)**
   a. $f(x)=\left(4x^3-2x\right)^6 \rightarrow f'(x)=6\cdot\left(4x^3-2x\right)^5\left(12x^2-2\right)$
   b. $f(x)=x^3\cdot e^x \rightarrow f'(x)=3x^2\cdot e^x+x^3\cdot e^x$
   c. $f(x)=x\cdot\ln(x)-x \rightarrow f'(x)=1\cdot\ln(x)-x\cdot\dfrac{1}{x}-1=\ln(x)$
   d. $f(x)=\dfrac{5x^2}{x+1} \rightarrow f'(x)=\dfrac{10x\cdot(x+1)-5x^2\cdot 1}{(x+1)^2}$

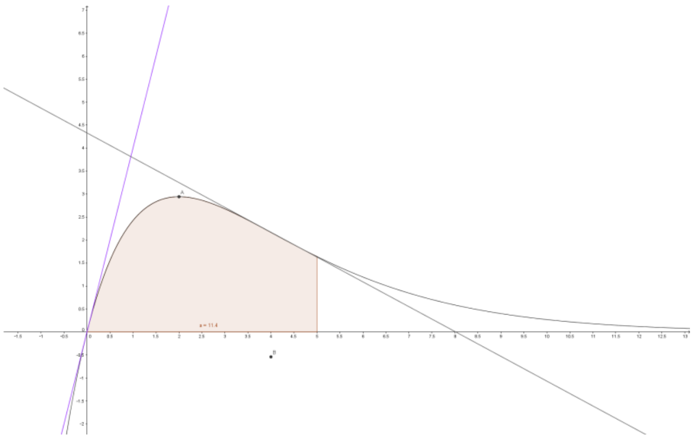
2. Bestimmen Sie die Stammfunktion der folgenden Funktionen **(je 2P)**
   a. $f(x)=e^{-2x} \rightarrow F(x)=-\dfrac{1}{2}e^{-2x}$
   b. $f(x)=e^{kx}+2 \rightarrow F(x)=\dfrac{1}{k}\cdot e^{kx}+2x$
   c. $f(x)=\dfrac{1}{2x+1} \rightarrow F(x)=\dfrac{1}{2}\ln(2x+1)$
   d. $f(x)=\dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2} \rightarrow F(x)=-2\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)^{-1}$

3. Kurvendiskussion von $f(x)=4x\cdot e^{-0,5x}$
   a. Nullstellen der Funktion. x=0, da die e-Funktion nie Null wird. **(2P)**

   b. Funktionswerte an der Stelle −2; −1; 0; 1; 2.
      $f(-2)=4(-2)\cdot e^{-0,5\cdot(-2)}=-21,746$ f(−) 1(=) −0 4 ( ) , · 1 5 − $f(0)=3\cdot 0\cdot e^{-2\cdot 0}=0$
      f( ) = 1· · −0 4=' 1 5 $f(2)=4\cdot 2\cdot e^{-0,5\cdot 2}=2,943$ **(2P)**

   c. Verhalten der Funktion $\lim\limits_{x\to\infty}=4x\cdot e^{-0,5x}=0$ $\lim\limits_{x\to-\infty}=4x\cdot e^{-0,5x}=-\infty$. **(2P)**

   d. Ableitungen $f'(x)=e^{-0,5x}\cdot(-2x+4)$ und $f''(x)=e^{-0,5x}\cdot(x-4)$ **(4P)**
   e. Max an der Stelle x=2 $P(2/2,94)$ **(3P)**
   f. WP an der Stelle x=4 $Q(4/2,165)$ **(3P)**
   g. Zeichnen **(3P)**
   h. Ableiten ergibt f(x) **(3P)**



   i. $A=\int 4x\cdot e^{-0,5x}dx=\left[e^{-0,5x}\cdot(-8x-16)\right]_0^5=-4,59675-(-16)=11,4$ **(3P)**
   j. $t_1=4x$ $t_2=-0,54\cdot x+4,33$ Schnitt bei S(0,995/3,815) **(5P)**