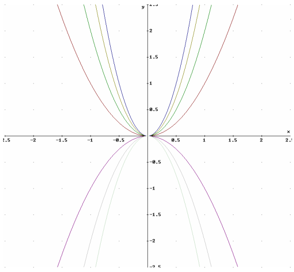


24.02.2011

S2 Klausur Nr.1 Mathematik

Grundlegendes Niveau

Zulässige Hilfsmittel: Blatt, Stift, Taschenrechner

0. Herr Reichmann will sein Geld verdoppeln. Er hat dazu zehn Jahre Zeit. Welchen Zinssatz muss er bei der Bank bekommen, damit sein Wunsch erfüllt wird? **(2P)**

1. Bestimmen Sie die erste Ableitung der gegebenen Funktionen: **(je 1P)**

   a. $f(x) = \sin(2x)$

   b. $f(x) = e^{-3x}$

   c. $f(x) = \frac{1}{x}$

   d. $f(x) = \ln(x)$

2. Untersuchen Sie die Funktion $f_t(x) = (x-t)^2 - 9$ mit $t \in \mathbb{R} : t \geq 0$ wie folgt: **(je 2P)**

   a. Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung der Funktion
   b. Bestimmen Sie die Stammfunktion der Funktion
   c. Ermitteln Sie die Nullstelle der Funktion in Abhängigkeit von t.
   d. Untersuchen Sie die Funktion auf Punkt- und Achsensymmetrie. Hinweis: Es existiert ein t, für das die Funktion eine Symmetrie aufweist.
   e. Bestimmen Sie Minima und Maxima der Funktion.

3. Untersuchen Sie die Funktion $f_t(x) = x^3 - tx$ mit $t \in \mathbb{R}$ wie folgt: **(je 2P)**

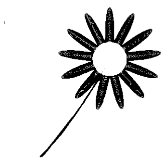
   a. Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung der Funktion
   b. Bestimmen Sie die Stammfunktion der Funktion
   c. Ermitteln Sie die Nullstelle der Funktion in Abhängigkeit von t.
   d. Untersuchen Sie die Funktion auf Punkt- und Achsensymmetrie.
   e. Bestimmen Sie Minima und Maxima der Funktion.

4. Berechnen Sie: **(4P)**

$$\int_{-2}^{2} (x^2 + x + 2)\,dx$$

Σ=28 Punkte

Viel Erfolg!



L Ö S U N G

0. $2 = 1 \cdot z^{10}$ → $z = \sqrt[10]{2} \approx 1{,}072$ Herr Reichmann müsste also etwa 7,2% Zinsen bekommen.

1. Bestimmen Sie die erste Ableitung der gegebenen Funktionen: **(je 1P)**

   a. $f(x) = \sin(2x) \rightarrow f'(x) = 2\cos(2x)$

   b. $f(x) = e^{-3x} \rightarrow f'(x) = -3e^{-3x}$

   c. $f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

   d. $f(x) = \ln(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

2. Untersuchen Sie die Funktion $f_t(x) = (x-t)^2 - 9$ mit $t \in \mathbb{R} : t \geq 0$ wie folgt: **(je 2P)**

   a. $f_t(x) = (x-t)^2 - 9 \rightarrow f'(x) = 2 \cdot (x-t) \rightarrow f''(x) = 2$

   b. $\int (x-t)^2 - 9dx = \frac{1}{3}(x-t)^3 - 9x$

   c. $(x-t)^2 - 9 = 0$ → $(x-t)^2 - 9 = 0 \rightarrow (x-t)^2 = 9 \rightarrow x - t = \pm 3 \rightarrow x_1 = 3 + t; x_2 = -3 + t$

   d. Achsensymmetrie:
   $f(x) = f(-x) \rightarrow (x-t)^2 - 9 = (-x-t)^2 - 9 \rightarrow (x-t)^2 = (-x-t)^2$
   $\rightarrow (x-t)^2 = (-x-t)^2 \rightarrow x^2 - 2xt + t^2 = (-x)^2 - 2(-x) \cdot t + t^2 \rightarrow x^2 - 2xt + t^2 = x^2 + 2xt + t^2$
   ist erfüllt, falls t=0 ist!

   e. Minima: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) > 0$
   $2 \cdot (x-t) = 0 \rightarrow x = t$, da $f''(x) = 2$ ist liegt an der Stelle x=t ein Minimum vor.

3. Untersuchen Sie die Funktion $f_t(x) = x^3 - tx$ mit $t \in \mathbb{R}$ wie folgt: **(je 2P)**

   a. $f_t(x) = x^3 - tx \rightarrow f'(x) = 3x^2 - t \rightarrow f''(x) = 6x$

   b. $\int (x^3 - tx)dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}tx^2$

   c. $x^3 - tx = 0 \rightarrow (x^2 - t)x = 0 \rightarrow x_1 = 0; x_2 = \sqrt{t}; x_3 = -\sqrt{t}$

   d. Punktsymmetrie: $-f(x) = f(-x) \rightarrow -(x^3 - tx) = (-x)^3 - t(-x)$
   $\rightarrow -x^3 + tx = -x^3 + tx$ → Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist die Punktsymmetrie erfüllt.

   e. $f'(x) = 0 \rightarrow f'(x) = 3x^2 - t = 0 \rightarrow 3x^2 = t \rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{t}{3}}$ einsetzen in f´´ liefert:
   $f''\left(\sqrt{\frac{t}{3}}\right) = 6 \cdot \sqrt{\frac{t}{3}}$ und somit >0 → Minimum falls t>0, sonst keine reelle Lösung
   $f''\left(-\sqrt{\frac{t}{3}}\right) = 6 \cdot \left(-\sqrt{\frac{t}{3}}\right)$ und somit <0 → Maximum falls t>0, sonst keine reelle Lösung

4. $\int_{-2}^{2} (x^2 + x + 2)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{3}2^3 + \frac{1}{2}2^2 + 2 \cdot 2 - \left(\frac{1}{3}(-2)^3 + \frac{1}{2}(-2)^2 + 2 \cdot (-2)\right) = \frac{40}{3}$